

Πρόταση

Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in A$ τότε:

$$i) \sup\{f(x) : x \in A\} \leq \sup\{g(x) : x \in A\}$$

$$ii) \inf\{f(x) : x \in A\} \leq \inf\{g(x) : x \in A\}$$

Απόδειξη

$$i) \text{ ισχύει } f(x) \leq g(x) \leq \sup\{g(x) : x \in A\} = \sup g$$

Αλλά $\sup f$ είναι μικρότερο ή ίσο από ένα αριθμό που είναι άνω από

$$\sup\{f(x) : x \in A\} \leq \sup g$$

ii) Όσοι $\forall x \in A : \inf f \leq f(x) \leq g(x)$ έχε $\inf f$ κάτω από ή ίσο από g οπότε: $\inf f \leq \inf g$

ΛΕΜΜΑ-ΕΝΙΤΙ

Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα ού αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in A$ τότε για $y \in A''$:

$$i) \liminf_{x \rightarrow y} f(x) \leq \liminf_{x \rightarrow y} g(x)$$

$$ii) \limsup_{x \rightarrow y} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow y} g(x)$$

Άσκηση

$$\text{Έστω } f(x) = (1 + e^{-x}) \sin x$$

να υπολογίσετε το $\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και το $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Λύση

Έχουμε $\forall x \in (0, +\infty) : -1 \leq \sin x \leq 1$, επίσης $(1 + e^{-x}) > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$ οπότε $-(1 + e^{-x}) \leq (1 + e^{-x}) \sin x \leq 1 + e^{-x}$ οπότε

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} [-(1 + e^{-x})] \leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x}) \quad \wedge$$

$$-\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x}) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x}) \quad \wedge$$

$$-1 \leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 1 \quad \text{όπου αν } x_n = 2n\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{τότε}$$

$$f(x_n) = \left(1 + \frac{1}{\exp(2n\pi - \frac{\pi}{2})}\right) \sin(2n\pi - \frac{\pi}{2}) = -\left(1 + \frac{1}{\exp(2n\pi - \frac{\pi}{2})}\right)$$

$$\text{οπότε } \lim f(x_n) = -1 \quad \text{Άρα } \liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

$$\text{Αν } y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{τότε } f(y_n) = \left(1 + \frac{1}{\exp(2n\pi + \frac{\pi}{2})}\right) \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2})$$

$$\text{έχει } \lim f(y_n) = 1 \Rightarrow \limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

Πρόταση

Έστω (a_n) και (b_n) ακολουθίες στο $\mathbb{R}$

$$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf (a_n + b_n)$$

Απόδειξη

Έστω $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Επίσης, έστω $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ τότε
 $\liminf (a_n + b_n) = \sup_k \inf\{a_n + b_n : n \geq k\} \geq \inf\{a_n + b_n : n \geq k_0\} \geq$
 $\geq \inf\{a_n : n \geq k_0\} + \inf\{b_n : n \geq k_0\}$ διότι:

$$\left[\begin{array}{l} \inf f \leq f \\ \inf g \leq g \end{array} \right] \text{ οπότε } \inf f + \inf g \leq f + g \text{ έπει } \inf f + \inf g \leq \inf (f + g)$$
$$\liminf (a_n + b_n) \geq \inf\{a_n : n \geq k_1\} + \inf\{b_n : n \geq k_2\} \quad (*)$$

Ορίσουμε ως $u_k := \inf\{a_n : n \geq k\}$ δηλ. (u_k) αύξουσα ακολ.

(διότι όσο το k αυξάνει το σύνολο $\{a_n : n \geq k\}$ μικραίνει έπει
το $\inf\{ \}$ (εξαιτίας $\sup$))., οπότε $\lim u_k = \sup u_k$
(εφόσον $u_k \uparrow$ το όριο είναι το $\sup u_k$)

Οπότε, από τη σχέση $(*)$ παίρνουμε $k_1 \rightarrow +\infty$ και
 $k_2 \rightarrow +\infty$ έχουμε:

$$\liminf\{a_n + b_n\} \geq \sup_k \inf\{a_n : n \geq k\} + \sup_k \inf\{b_n : n \geq k\} = \liminf a_n + \limsup b_n$$

το (ii) αποδεικνύεται όμοια με το (i)

Πρόταση

$\forall n (a_n), (b_n)$ ακολ. πραγ. αριθμών. $\mu \in \mathbb{R}$ $a_n > 0$ & $b_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$

τότε ισχύουν τα εξής:

$$i) (\liminf a_n) \cdot (\liminf b_n) \leq \liminf (a_n \cdot b_n)$$

$$ii) \limsup (a_n \cdot b_n) \leq (\limsup a_n) \cdot (\limsup b_n)$$

$$iii) \text{ Εάν } x \geq 0 \text{ τότε } \liminf (x \cdot a_n) = x \cdot \liminf a_n$$

$$iv) \text{ Εάν } x \geq 0 \text{ τότε } \limsup (x \cdot a_n) = x \cdot \limsup a_n$$

Πρόταση

Έστω (a_n) ακολ. στο $\mathbb{R}$ τότε για $x \in \mathbb{R}$

$$\text{ισχύει: } \liminf (a_n + x) = \liminf a_n + x$$

Απόδειξη: ίδιος λόγος

Ανάλυση πρότασης

Σύμφωνα με προηγ. πρόταση:

$$\liminf a_n + \gamma \leq \liminf a_n + \liminf \gamma = \liminf (a_n + \gamma) \quad \text{δηλ.}$$

$$\liminf a_n + \gamma \leq \liminf (a_n + \gamma) \quad (1)$$

$$\text{Ομοίως, } \liminf a_n = \liminf (a_n + \gamma - \gamma) \geq \liminf (a_n + \gamma) + \liminf (-\gamma)$$

$$\text{Από (1) & (2): } \exists \gamma > \varepsilon \text{ 2 ημετέροις.} \quad = \liminf (a_n + \gamma) - \gamma$$

Πρόταση

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις και $y \in A$. Ξέρουμε

ότι οι αλυσίδες αντιστοίχως f και g που τείνουν στο

οι $\liminf$ είναι ανεξαρτήτως:

$$i) \liminf_{x \rightarrow y} f(x) + \liminf_{x \rightarrow y} g(x) \leq \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x))$$

$$ii) \limsup_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x)) \leq \limsup_{x \rightarrow y} f(x) + \limsup_{x \rightarrow y} g(x)$$

(δίνοντας $(\pm \infty) + (\mp \infty)$)

Απόδειξη

i) Έστω $(x_n) \subseteq A \setminus \{y\}$ με $x_n \rightarrow y$ και

$$\liminf (f(x) + g(x)) = \lim (f(x_n) + f(y_n)) \geq \liminf (f(x_n) + g(x_n))$$

$$\geq \liminf f(x_n) + \liminf g(x_n)$$

$$\left[\begin{array}{l} \Gamma_y = \{x^*: (y_n) \subseteq A \setminus \{y\}, y_n \rightarrow y, f(y_n) \rightarrow x^*\} \\ \exists (x_{n_k}) \subseteq A \setminus \{y\} \quad x_{n_k} \rightarrow y \quad f(x_{n_k}) \rightarrow \liminf f(x) \\ \inf \Gamma_y \end{array} \right]$$

$$\text{αρα } \liminf (f(x) + g(x)) \geq \liminf f(x) + \liminf g(x)$$

(όπου $\exists (x_n) \subseteq A \setminus \{y\} : x_{n_k} \rightarrow y$ και $f(x_{n_k}) \rightarrow \liminf f(x)$)

$$\text{αρα } \liminf f(x) + \liminf g(x) \leq \liminf (f(x) + g(x))$$

ii) Γνωρίζουμε: $\liminf_{x \rightarrow y} (-f(x)) = -\limsup_{x \rightarrow y} f(x)$ οπότε

$$\limsup_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x)) = -\liminf_{x \rightarrow y} (-f(x) + g(x)) = -\liminf_{x \rightarrow y} (-f(x) - g(x))$$

$$\geq -\liminf_{x \rightarrow y} (-f(x)) + (-\liminf_{x \rightarrow y} (-g(x))) = \limsup_{x \rightarrow y} f(x) + \limsup_{x \rightarrow y} g(x)$$

Proposition

Av $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ou $y \in A''$ ou $c \in \mathbb{R}$ alors

$$(i) \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + c) = \liminf_{x \rightarrow y} f(x) + c$$

$$(ii) \limsup_{x \rightarrow y} (f(x) + c) = \limsup_{x \rightarrow y} f(x) + c$$

Preuve

$$c + \liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \liminf_{x \rightarrow y} c + \liminf_{x \rightarrow y} f(x) \leq \liminf_{x \rightarrow y} (c + f(x))$$

$$\text{Enons, } \liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + c - c) \geq$$

$$\geq \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + c) + \liminf_{x \rightarrow y} (-c) \Rightarrow \liminf_{x \rightarrow y} f(x) + c \geq \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + c)$$

Proposition

Soit $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ou $y \in A''$ ou $c \in \mathbb{R}$ alors

$$(i) (\liminf_{x \rightarrow y} f(x)) \cdot (\liminf_{x \rightarrow y} g(x)) \leq \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) \cdot g(x))$$

$$(ii) \limsup_{x \rightarrow y} (f(x) \cdot g(x)) \leq (\limsup_{x \rightarrow y} f(x)) \cdot (\limsup_{x \rightarrow y} g(x))$$

Preuve

$$\text{Soit } (x_k) \subseteq A \setminus \{y\} \text{ t.e. } x_k \rightarrow y : \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_k) \cdot g(x_k))$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_k) \cdot g(x_k)) \geq (\liminf_{x \rightarrow y} f(x)) \cdot (\liminf_{x \rightarrow y} g(x))$$

$$\geq (\liminf_{x \rightarrow y} f(x)) \cdot (\liminf_{x \rightarrow y} g(x))$$

$$\wedge \text{ Soit } (x_k) \subseteq A \setminus \{y\} \text{ t.e. } x_k \rightarrow y : f(x_k) = \liminf_{x \rightarrow y} f(x) : \text{ ou } x_k \rightarrow y$$

On a donc $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \cdot \liminf_{x \rightarrow y} g(x) \leq \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) \cdot g(x))$

Proposition

Soit ou $\lim_{x \rightarrow y} g(x)$ existe : alors v.d.s.

$$\liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x)) = \liminf_{x \rightarrow y} f(x) + \lim_{x \rightarrow y} g(x)$$

Preuve

$$\text{on a: } \liminf_{x \rightarrow y} f(x) + \lim_{x \rightarrow y} g(x) \leq \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x))$$

$$\text{Enons, } \liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x) - g(x))$$

$$\geq \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x)) + \liminf_{x \rightarrow y} (-g(x)) = \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x)) - \lim_{x \rightarrow y} g(x)$$

$$\text{si } \liminf_{x \rightarrow y} f(x) + \lim_{x \rightarrow y} g(x) \geq \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x))$$

Άσκηση

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις.

N.δ.ο. $\forall y \in A'$ ισχύουν οι ανισότητες

(προσέδεον: οι πράξεις με υπερσυνόλους είναι ενισχυμένες)

i) $\liminf_{x \rightarrow y} (f+g) \leq \liminf f + \limsup g$

ii) $\liminf_{x \rightarrow y} f + \limsup g \leq \limsup (f+g)$

Λύση

i) Για να ισχύουν οι υπερσυνόλερες πράξεις πρέπει να ισχύει και κάποιο από τα παρακάτω:

α) $\liminf_{x \rightarrow y} f = +\infty$ και $\limsup g \in \mathbb{R}$ ή $\limsup g = +\infty$

β) $\liminf_{x \rightarrow y} f = -\infty$ και $\limsup g \in \mathbb{R}$ ή $\limsup g = -\infty$

γ) $\liminf f \in \mathbb{R}$ και $\limsup g$ ορισμένο

• Εάν $\liminf_{x \rightarrow y} f = +\infty$ και $\limsup g = +\infty$ τότε

$$\liminf_{x \rightarrow y} f + \limsup_{x \rightarrow y} f = +\infty \geq \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x))$$

• Εάν $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = +\infty$ και $\limsup g \in \mathbb{R}$ τότε

$$\liminf_{x \rightarrow y} f(x) + \limsup g = +\infty \geq \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x))$$

• Εάν $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = -\infty$ και $\limsup g = -\infty \Rightarrow \liminf_{x \rightarrow y} g(x) = -\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow y} g(x)$ ορίζει από μονοτονία

$$\liminf_{x \rightarrow y} (f+g) = \liminf_{x \rightarrow y} f + \lim_{x \rightarrow y} g \leq \liminf_{x \rightarrow y} f + \limsup_{x \rightarrow y} g$$

• Εάν $\liminf_{x \rightarrow y} f \in \mathbb{R}$ και $\limsup g = +\infty \Rightarrow$

$$\liminf_{x \rightarrow y} f + \limsup g = +\infty \geq \liminf_{x \rightarrow y} (f+g)$$

• Εάν $\liminf_{x \rightarrow y} f \in \mathbb{R}$ και $\limsup g = -\infty \Rightarrow \liminf g = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow y} g$

Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις:

$$\liminf_{x \rightarrow y} f = \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x) - g(x)) \geq$$

$$\geq \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x)) + \liminf_{x \rightarrow y} (-g(x)) = \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x)) - \limsup_{x \rightarrow y} g(x)$$

οπότε

$$\liminf_{x \rightarrow y} f + \limsup_{x \rightarrow y} g(x) \geq \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x))$$

ii) ομοίως και για το (ii)

Άσκηση

Έστω $f: A \rightarrow (0, +\infty)$ v.s.o. $\forall y \in A''$ ισχύει

$$\liminf_{x \rightarrow y} f^v(x) \geq (\liminf_{x \rightarrow y} f(x))^v$$

Απόδειξη

- Ισχύει για $v=1$ αφού $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = (\liminf_{x \rightarrow y} f(x))^1$
- Έστω ισχύει για $v=k$, $\liminf_{x \rightarrow y} f^k(x) \geq (\liminf_{x \rightarrow y} f(x))^k$
θ.δ.ο. ισχύει για $v=k+1$. ότ-ς,
$$\liminf_{x \rightarrow y} f^{(k+1)}(x) = \liminf_{x \rightarrow y} f^k(x) \cdot f(x) \geq \liminf_{x \rightarrow y} f^k(x) \cdot \liminf_{x \rightarrow y} f(x) \geq$$
$$\geq (\liminf_{x \rightarrow y} f(x))^k \cdot \liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \liminf_{x \rightarrow y} f^{(k+1)}(x)$$

ισχύει ~~στην περίπτωση~~ και για $k+1$ έπει απόδειχθηκε.

Άσκηση

$$\text{Έστω, } f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0, 1] \end{cases}$$

Αν $y \in [0, 1]$, να βρεθεί το $\liminf_{x \rightarrow y} f(x)$ και το $\limsup_{x \rightarrow y} f(x)$

Λύση

$$\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \inf \{x^*: (x_n) \subseteq [0, 1] \setminus \{y\}, x_n \rightarrow y \text{ και } f(x_n) = x^*\}$$

Έστω, $(x_n) \subseteq [0, 1] \setminus \{y\}$ τέ $x_n \rightarrow y$ τότε η (x_n) δε έχει όριο ρητών και άρρητων, οίγαυρ κείνο από το δίο δε έχει άπειρο πλήθος.

- Αν έχει άπειρο πλήθος ρητών, μπορούμε την (x_n) να ακολουθία τε ρητών όπου τότε $f(x_n) = 1$, οπότε $f(x_n) \rightarrow 1$
- Αν η (x_n) έχει άπειρος όπου άρρητων, μπορούμε την (x_n) να ακολουθία άρρητων όπου τότε $f(x_n) \rightarrow 0$
οπότε $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) = 1$ και $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = 0$